

Лекция 5. Графы. Раскраски графов. Хроматическое число графа. Критерий двуцветности графа. Верхние оценки хроматического числа графа.

Лектор — д.ф.-м.н. Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

Раскраска вершин графа

Раскраска графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

где из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Другими словами, любые смежные вершины обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее возможное число цветов, в которое можно окрасить его вершины.

Двуцветные графы

Граф G — **двуцветный**, если $\chi(G) = 2$.

Теорема 1. *Граф $G = (V, E)$ — двуцветный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.*

Доказательство.

1. Если в графе G есть цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.

Двуцветные графы

Доказательство.

2. Пусть теперь в графе G нет циклов нечетной длины.

Будем считать, что G — связный граф, иначе можно провести рассуждения для каждой его компоненты связности.

Построим в графе G его остовное дерево D .

В любом дереве для каждой пары вершин $v, w \in V$ существует ровно одна цепь из v в w .

Пусть $v \in V$ — какая-то вершина.

Рассмотрим раскраску ρ вершин $w \in V$ дерева D в два цвета:

$\rho(w) = 1$, если длина единственной цепи из v в w четна;

$\rho(w) = 2$, если длина единственной цепи из v в w нечетна.

Покажем, что при такой раскраске в графе G не окажется ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.

Двуцветные графы

Доказательство.

Предположим противное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$.

Рассмотрим в графе G замкнутый маршрут M :

сначала цепь из u в v в дереве D ,

затем цепь из v в w в дереве D

и по ребру (w, u) в u .

Длина этого маршрута нечетна, т.к. у длин цепей из u в v и из v в w в дереве D одинаковая четность.

Значит, из указанного замкнутого маршрута M можно выделить цикл нечетной длины. Противоречие. □

Оценка хроматического числа

Теорема 2. Для произвольного графа $G = (V, E)$ верно $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказательство: индукция по числу вершин $n = |V|$.

Базис индукции $n = 1$ верен.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с n вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ вершинами.

Оценка хроматического числа

Пусть $v \in V$ и $G' = G - v$.

Для графа G' верно предположение индукции, т.е.

$$\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G .

При этом вершина v останется неокрашенной.

Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней.

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, т.к. вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G)$ вершинами. $\square$

Верхняя оценка хроматического числа

Теорема 3. Если в графе $G = (V, E)$ с $\Delta(G) \geq 3$ найдется вершина $v \in V$, для которой $d_G(v) < \Delta(G)$, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Доказательство: индукция по числу вершин $n = |V|$.

Базис индукции верен.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с n вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ вершинами.

Выберем $v \in V$ с $d_G(v) < \Delta(G)$.

Положим $G' = G - v$.

Очевидно, что $\Delta(G') \leq \Delta(G)$.

Рассмотрим 2 случая.

Верхняя оценка хроматического числа

Доказательство.

Случай 1: $\Delta(G') \geq 3$ и в G' найдется такая вершина $u \in V \setminus \{v\}$, что $d_G(v) < \Delta(G')$.

Тогда для графа G' верно предположение индукции и $\chi(G') \leq \Delta(G')$.

Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G .

При этом вершина v останется неокрашенной.

Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней.

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$, т.к. вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G) - 1$ вершинами.

Верхняя оценка хроматического числа

Доказательство.

Случай 2: $\Delta(G') = 2$ или в графе G' для каждой вершины $u \in V \setminus \{v\}$, верно $d_G(v) = \Delta(G')$.

Тогда $\Delta(G') \leq \Delta(G) - 1$.

По теореме 2 раскрасим вершины графа G' в $\Delta(G') + 1$ цветов. Перенесем раскраску вершин графа G' в $\chi(G')$ цветов на вершины графа G .

При этом вершина v останется неокрашенной. Окрасим вершину v в цвет, который не встречается среди цветов вершин, смежных с ней.

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$, т.к. $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G)$ и вершина v смежна не более, чем с $\Delta(G) - 1$ вершинами. $\square$

Теорема Брукса

Если $G = K_n$, то $\Delta(G) = n - 1$ и $\chi(G) = n$.

Если G — цикл нечетной длины, то $\Delta(G) = 2$ и $\chi(G) = 3$.

Теорема 4 (Брукса). Если граф G не является полным графом или циклом с нечетной длиной, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Задачи

1. Найти хроматическое число графа $G = (V, E)$, если:

- 1) G — граф K_4 без одного ребра;
- 2) G — граф K_4 без двух ребер (рассмотреть все возможные случаи);
- 3) G — граф K_5 без одного ребра;
- 4) G — граф K_5 без двух ребер (рассмотреть все возможные случаи).

2. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа $G = (V, E)$, чтобы оставшийся граф можно было раскрасить в k цветов, если:

- 1) $G = K_4$, $k = 2$;
- 2) $G = K_5$, $k = 3$;
- 3) $G = K_6$, $k = 2$;
- 4) G состоит из 7 вершин, занумерованных числами от 0 до 6, и ребер вида $(i, i + 1 \pmod{7})$, $i = 0, 1, \dots, 6$, $k = 2$.

Конец лекции 5